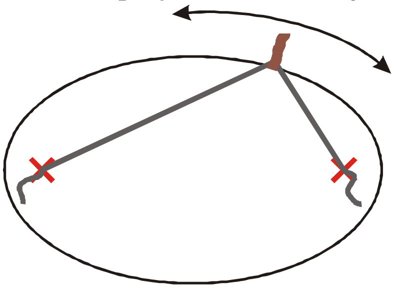
7.5.7 Elipsa

Předpoklady: 7501

Elipsa = „rozšlápnutá“ kružnice.
Jak ji sestrojit?

Zahradnická konstrukce elipsy (takto se vytyčují záhony):
Vezmeme provázek na koncích ho přiděláme tak, aby nebyl napnutý. Klacíkem provázek napneme tak, aby od obou bodů vytvořil úsečky, a postupně klacíkem posunujeme do stran, dokud neprojedeme všechny body okolo obou míst, kde je provázek přidělaný.

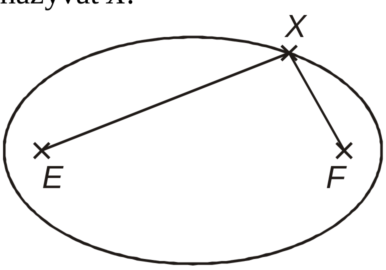


Pedagogická poznámka: Určitě stojí za to, provést konstrukci na tabuli. Studenty to vždycky zaujme.

Př. 1: Jaký vliv na tvar elipsy má rozdíl mezi délkou provázku mezi body přichycení a vzdáleností těchto bodů.

Čím je rozdíl mezi délkou provázku a vzdáleností bodů přichycení menší, tím je elipsa rozpláclejší. A naopak s růstem rozdílu se tvarem přibližuje kružnici.

Označíme si body, kde je provázek přichycen *E*, *F*. Bod, který právě kreslíme, budeme nazývat *X*.



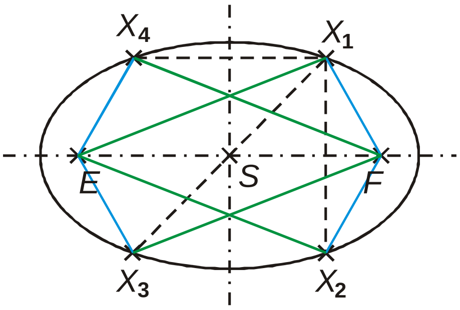
Př. 2: Navrhni na základě zahradnické konstrukce elipsy její definici jako množiny bodů v rovině.

Délka provázku je při kreslení všech bodů elipsy stejná a rovná se součtu vzdálenosti kresleného bodu od míst připevnění provázků $\Rightarrow$ pro body elipsy platí: $d = |EX| + |FX|$.

V rovině jsou dány dva body *E*, *F*. Množina všech bodů *X* roviny, pro které se součet $d = |EX| + |FX|$ vzdáleností bodů *X* od bodů *E*, *F* rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá elipsa. Body *E*, *F* se nazývají ohniska elipsy.

Jaký je vztah mezi elipsou a kružnicí?
Kružnice je speciální případ elipsy, jejíž ohniska splývají do jednoho bodu.

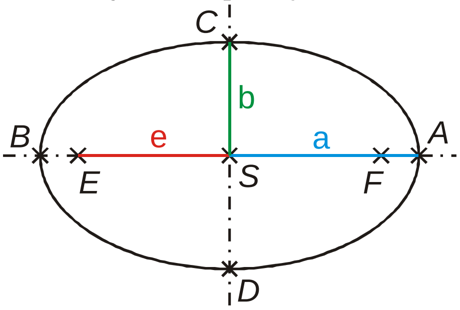
Př. 3: Dokresli do obrázku osy souměrnosti elipsy. Najdi bod, podle kterého je elipsa středově souměrná. Označ do obrázku obrazy bodu X v těchto souměrnostech, tedy další body elipsy.



Elipsa je souměrná podle:

- vodorovné osy, která prochází ohnisky E, F,
- svislé osy, která je osou úsečky EF,
- středu, který je průsečíkem obou os.

Průsečíky os s elipsou jsou důležité body elipsy:



Terminologie:

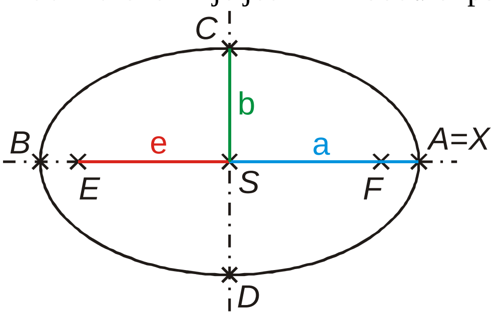
body E, F – ohniska elipsy
bod S – střed elipsy
přímka EF – hlavní osa elipsy
přímka CD – vedlejší osa elipsy
body A, B – hlavní vrcholy elipsy
body C, D – vedlejší vrcholy elipsy

vzdálenost $|ES| = |FS| = e$ - výstřednost (excentricita) elipsy

vzdálenost $|AS| = |BS| = a$ - hlavní poloosa elipsy

vzdálenost $|CS| = |DS| = b$ - vedlejší poloosa elipsy

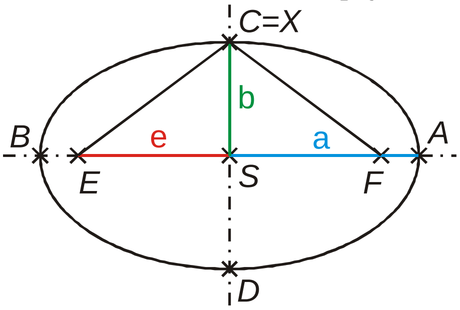
Zkusíme najít vztahy mezi vzdálenostmi.
Hlavní vrchol A je jedním z bodů elipsy (označíme si ho také X).



$\Rightarrow \ d = |EX| + |FX| = |EA| + |FA| = |ES| + |SA| + (|SA| - |SF|) = 2|SA| + |ES| - |SF| = 2|SA|$

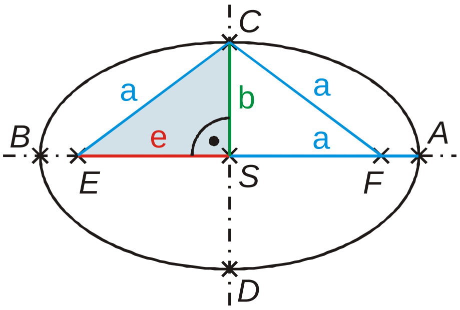
$\Rightarrow d = |EX| + |FX| = 2|SA| = 2a$ (musí platit $|SA| > |SF|$)

Teď zvolíme za vrchol elipsy vedlejší vrchol C (označíme si ho také X):



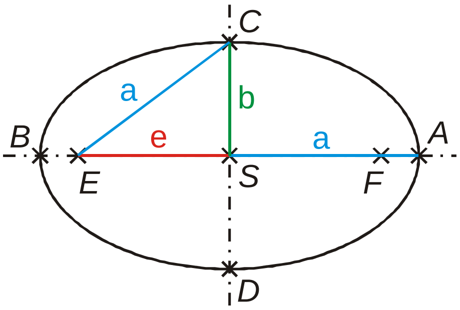
Platí: $d = |EX| + |FX| = |EC| + |FC| = 2|SA|$, protože: $|EC| = |FC|$ (bod C leží na ose úsečky EF). $\Rightarrow$ $|EC| = |FC| = |SA| = a$

Nakreslíme vzdálenosti do obrázku:



Z pravoúhlého trojúhelníka ihned vidíme, že platí $a^2 = b^2 + e^2$.

Př. 4: Pro elipsu platí: $a = 5$, $e = 4$. Urči vedlejší poloosu a souřadnice všech vrcholů a ohnisek této elipsy, pokud její střed leží v počátku soustavy souřadnic.

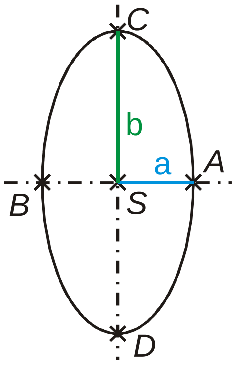


Platí: $a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

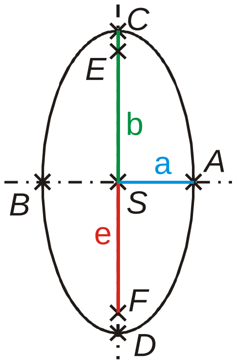
$S[0;0]$ $\Rightarrow$ souřadnice: $A[5;0]$, $B[-5;0]$, $C[0;3]$, $D[0;-3]$, $E[-4;0]$, $F[4;0]$.

Pedagogická poznámka: Největší problémy mají studenti se souřadnicemi hlavních vrcholů. Souvisí to s tím, jak je na tabuli nakreslený obrázek elipsy, ze kterého jsme získali vztah $a^2 = b^2 + e^2$. Pokud v něm není vyznačena vzdálenost a jako hlavní poloosa, ale pouze jako vzdálenost $|EC|$, jsou některé typy studentů zcela bezradné.

Př. 5: Pro elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic platí: $a = 2$, $b = 4$. Nakresli její obrázek. Urči její excentricitu, souřadnice jejích vrcholů a ohnisek.



Elipsa je „postavená na špičku“, poloosa *b* je větší než poloosa *a*. $\Rightarrow$ Řešíme pro nás novou polohu elipsy, hlavní poloosou je poloosa *b*, ohniska leží nad sebou, excentricitu musíme určit podle vzorce $e^2 = b^2 - a^2$.



$e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Souřadnice: $A[2;0]$, $B[-2;0]$, $C[0;4]$, $D[0;-4]$, $E\left[0;2\sqrt{3}\right]$, $F\left[0;-2\sqrt{3}\right]$.

Př. 6: Elipsa se středem v bodě $S[-1;2]$ má jeden z hlavních vrcholů v bodě $A[2;2]$ a excentricitu $e = 2$. Urči souřadnice všech vrcholů a ohnisek.

Hlavní poloosa $a = |SA| = 3 \Rightarrow B[-4;2]$.

Ohniska: $E[1;2]$, $F[-3;2]$.

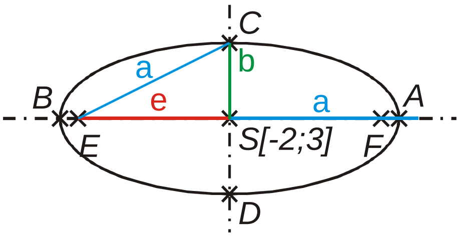
Vedlejší poloosa $b^2 = a^2 - e^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$.

Vedlejší vrcholy: $C\left[-1;2+\sqrt{5}\right]$, $D\left[-1;2-\sqrt{5}\right]$.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, kolik studentů má s předchozími příklady problémy. Často jde však pouze o důsledek špatného opisování, zejména pokud jde o vyznačování hlavní poloosy. Hodně také pomáhá kreslení obrázků, kde jsou u vrcholů rovnou napsány souřadnice.

Př. 7: Jsou dány body $E[2;3]$ a $F[-6;3]$. Urči vrcholy a ostatní parametry elipsy, pokud body *E*, *F* jsou její ohniska a pro její vedlejší poloosu platí $b = 2$.

Střed elipsy je středem úsečky $EF \Rightarrow S\left[\frac{2+(-6)}{2};\frac{3+3}{2}\right] = [-2;3]$.



Výstřednost: $e = |ES| = 4$.

Hlavní poloosa: $a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A\left[-2+2\sqrt{5};3\right]$,

$B\left[-2-2\sqrt{5};3\right]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[-2;5]$; $D[-2;1]$.

Shrnutí: Elipsa je množina bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od ohnisek.